



UDK: 631.4

## POREZI I STABILNOST RASTA DOHOTKA U PROIZVODNJI TRAKTORA

Vesna Jablanović

*Poljoprivredni fakultet - Beograd*

**Sadržaj:** Teorija haosa analizira strukturu aperiodičnih, nepredvidivih sistema.

Deterministički haos se odnosi na iregularno ili haotično kretanje koje generišu nelinearni sistemi. Haos uključuje tri značajna principa: (i) ekstremnu senzitivnost na početne uslove; (ii) uzrok i posledica nisu proporcionalni; i (iii) nelinearnost.

Osnovni cilj ovog rada je pruži relativno jednostavan model haotičnog rasta dohotka u proizvodnji traktora koji ima mogućnost da generiše stabilnu ravnotežu, ciklus ili haos.

Ključna hipoteza ovog rada se zasniva na ideji da koeficijent  $\pi = \frac{\beta}{\beta - \alpha}$  igra ključnu

ulogu u objašnjenju stabilnosti dohotka u proizvodnji traktora, pri čemu je  $\alpha = \frac{\Delta Y_d}{\Delta L}$ ,

$\beta = \frac{Y_d}{L}$ ,  $\Delta Y_d$  – porast raspoloživog dohotka u proizvodnji traktora,  $\Delta L$  – porast radne snage u proizvodnji traktora,  $Y_d$  – raspoloživi dohodak u proizvodnji traktora,  $L$  – radna snaga u proizvodnji traktora.

**Ključne reči:** dohodak, poreska stopa, proizvodnja traktora, haos.

### UVOD

Teorija haosa se koristi da bi dokazala da se haotične fluktuacije mogu pojaviti u potpuno determinističkim modelima. Teorija haosa otkriva strukturu u aperiodičnim, dinamičkim sistemima. Haotični sistemi pokazuju senzitivnu zavisnost od početnih uslova: naizgled neznačajne promene početnih uslova stvaraju velike razlike u outputu. U stabilnim dinamičkim sistemima mala promena jedne varijable proizvodi malu i lako merljivu sistematsku promenu. Teorija haosa je startovala sa Lorenz-ovim (1963) otkrićem kompleksne dinamike koja se javlja u sistemu tri nelinearne diferencijalne jednačine i vodi ka turbulenciji u vremenskom sistemu. Li i Yorke (1975) su otkrili da jednostavna logistička kriva može pokazati veoma kompleksno ponašanje. Dalje, May (1976) je opisao haos u populacionoj biologiji. Teoriju haosa su u ekonomiji primenili Benhabib i Day (1981, 1982), Day (1982, 1983), Grandmont (1985), Goodwin (1990), Medio (1993), Lorenz (1993), između ostalih.

### MODEL

Iregularno kretanje dohotka u proizvodnji traktora (Y) se može analizirati u formalnom okviru haotičnog modela rasta.

Marginalna produktivnost radnika u proizvodnji traktora je prikazana na sledeći način,

$$\alpha = \frac{\Delta Y_d}{\Delta L} \quad (1)$$

dok je prosečna produktivnost radnika u proizvodnji traktora prikazana na sledeći način,

$$\beta = \frac{Y_d}{L} \quad (2)$$

pri čemu je:  $Y_d$  - raspoloživi dohodak u proizvodnji traktora,  $L$  - radna snaga u proizvodnji traktora,  $\Delta$  - porast.

Raspoloživi dohodak u proizvodnji traktora je:

$$Y_d = (1 - t) Y \quad (3)$$

pri čemu je:  $Y_d$  - raspoloživi dohodak u proizvodnji traktora,  $Y$  - dohodak u proizvodnji traktora,  $t$  - poreska stopa.

Ako je data proizvodna funkcija:

$$Y_t = L_t^{1/2} \quad (4)$$

tada supstitucijom (4), (3), i (2) u (1) dobijamo diferencnu jednačinu:

$$Y_{t+1} = \frac{\beta}{\beta - \alpha} Y_t - \frac{\alpha \beta}{(1 - t)(\beta - \alpha)} Y_t^2 \quad (5)$$

pri čemu je  $Y_t$  - dohodak u proizvodnji traktora

Dalje, pretpostavlja se da je tekuća vrednost dohotka u proizvodnji traktora, (Y), ograničena svojom maksimalnom vrednošću u vremenskoj seriji, ( $Y^m$ ). Ova pretpostavka zahteva modifikaciju zakona rasta. Sada, tekuća vrednost dohotka u proizvodnji traktora, (Y), zavisi od koeficijenta  $y$ , pri čemu se  $y = Y/Y^m$  kreće između 0 i 1. Najzad, stopa rasta dohotka u proizvodnji traktora se prikazuje na sledeći način

$$y_{t+1} = \frac{\beta}{\beta - \alpha} y_t - \frac{\alpha \beta}{(1 - t)(\beta - \alpha)} y_t^2 \quad (6)$$

Ovaj model koji je zadat jednačinom (6) se naziva logistički model. Za veći broj vrednosti parametara  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $t$  ne postoji eksplicitno rešenje za (6). Naime, uz zadate vrednosti parametara  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $t$  i početne vrednosti  $y_0$  ne bi bilo dovoljno da se predvidi vrednost varijable  $y_t$  što je suština prisustva haosa u determinističkim feedback - procesima. Lorenz (1963) je otkrio ovaj efekat - nedostatak predvidljivosti u determinističkim sistemima. Senzitivna zavisnost od inicijalnih uslova je jedan od suštinskih sastojaka onoga što se zove deterministički haos.

Moguće je pokazati da su iteracije logističke jednačine

$$z_{t+1} = \pi z_t (1 - z_t) \quad z_t \in [0,1] \quad \pi \in [0,4] \quad (7)$$

ekvivalentne iteracijama modela rasta (6) kada koristimo sledeću identifikaciju

$$z_t = \frac{\alpha}{(1 - t)} y_t \quad i \quad \pi = \frac{\beta}{\beta - \alpha} \quad (8)$$

Korišćenjem (8) i (6) dobijamo

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= \frac{\alpha}{(1-t)} y_{t+1} = \frac{\alpha}{(1-t)} \left[ \frac{\beta}{\beta-\alpha} y_t - \frac{\alpha\beta}{(1-t)(\beta-\alpha)} y_t^2 \right] = \\ &= \frac{\alpha\beta}{(1-t)(\beta-\alpha)} y_t - \frac{\alpha^2\beta}{(1-t)^2(\beta-\alpha)} y_t^2 \end{aligned}$$

Sa druge strane, korišćenjem (6) i (7) dobijamo

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= \pi z_t (1 - z_t) = \frac{\beta}{\beta-\alpha} \left( \frac{\alpha}{(1-t)} y_t \right) \left( 1 - \frac{\alpha}{(1-t)} y_t \right) = \\ &= \frac{\alpha\beta}{(1-t)(\beta-\alpha)} y_t - \frac{\alpha^2\beta}{(1-t)^2(\beta-\alpha)} y_t^2 \end{aligned}$$

Tako, pokazali smo da su iteracije ne  $y_{t+1} = \frac{\beta}{\beta-\alpha} y_t - \frac{\alpha\beta}{(1-t)(\beta-\alpha)} y_t^2$

ekvivalentne iteracijama logističke jednačine,  $z_{t+1} = \pi z_t (1 - z_t)$

korišćenjem  $z_t = \frac{\alpha}{(1-t)} y_t$  i  $\pi = \frac{\beta}{\beta-\alpha}$ . To je značajno s obzirom da su dinamička svojstva logističke jednačine (7) bila detaljno analizirana. (Li i Yorke (1975), May (1976)).

Dobijeno je da: (i) Za vrednosti parametara  $0 < \pi < 1$  sva rešenja će konvergirati ka  $z = 0$ ; (ii) Za  $1 < \pi < 3,57$  postoje fiksne tačke čiji broj zavisi od  $\pi$ ; (iii) Za  $1 < \pi < 2$  sva rešenja se monotono povećavaju ka  $z = (\pi - 1) / \pi$ ; (iv) Za  $2 < \pi < 3$  fluktuacije će konvergirati ka  $z = (\pi - 1) / \pi$ ; (v) Za  $3 < \pi < 4$  sva rešenja će neprekidno fluktuirati; (vi) Za  $3,57 < \pi < 4$  rešenje postaje "haotično" što znači da postoji potpuno aperiodično rešenje ili periodično rešenje sa veoma velikom, komplikovanom periodom. To znači da staza  $z_t$  fluktuiira na naizgled slučajajan način tokom vremena, ne smirujući se u ma kakav regularan obrazac.

## ZAKLJUČAK

Ovim radom se naglašava značaj upotrebe haotičnog modela rasta dohotka u proizvodnji traktora radi predviđanja fluktuacija. Model (6) se zasniva na specificiranim parametrima  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $t$  i početnoj vrednosti dohotka u proizvodnji traktora,  $y_0$ . Čak i malo odstupanje od zadatih vrednosti parametara  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $t$  početne vrednosti dohotka u proizvodnji traktora,  $y_0$ , pokazuje da je teško predviđati njegovo dugoročno ponašanje.

Ključna hipoteza ovog rada se zasniva na ideji na koeficijent  $\pi = \frac{\beta}{\beta-\alpha}$  ima suštinsku

ulogu u objašnjenju ekonomske stabilnosti dohotka u proizvodnji traktora, pri čemu  $\alpha = \frac{\Delta Y_d}{\Delta L}$ ,  $\beta = \frac{Y_d}{L}$ ,  $\Delta Y_d$  – porast raspoloživog dohotka u proizvodnji traktora,  $\Delta L$  – porast radne snage u proizvodnji traktora,  $Y_d$  – raspoloživi dohodak u proizvodnji traktora,  $L$  – radna snaga u proizvodnji traktora.

## LITERATURA

- [1] Benhabib, J., Day, R.H. (1981) Rational Choice and Erratic Behaviour, *Review of Economic Studies* 48: 459-471.
- [2] Benhabib, J., Day, R.H. (1982) Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generation Model, *Journal of Economic Dynamics and Control* 4: 37-55.
- [3] Benhabib, J., Nishimura, K. (1985) Competitive Equilibrium Cycles, *Journal of Economic Theory* 35: 284-306.
- [4] Day, R.H. (1982) Irregular Growth Cycles, *American Economic Review* 72: 406-414.
- [5] Day, R.H. (1983) The Emergence of Chaos from Classical Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics* 98: 200-213.
- [6] Goodwin, R.M. (1990) *Chaotic Economic Dynamics*, Clarendon Press, Oxford.
- [7] Grandmont, J.M. (1985) On Endogenous Competitive Business Cycles, *Econometrica* 53: 994-1045.
- [8] Kelsey, David (1988) The Economics Of Chaos Or The Chaos Of Economics, *Oxford Economic Papers*; Mar 1988; 40, 1; ProQuest Social Science Journals.
- [9] Li, T., Yorke, J. (1975) Period Three Implies Chaos, *American Mathematical Monthly* 8: 985-992.
- [10] Lorenz, E.N. (1963) Deterministic nonperiodic flow, *Journal of Atmospheric Sciences* 20: 130-141.
- [11] Lorenz, H.W. (1993) *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, 2nd edition, Springer-Verlag, Heidelberg.
- [12] May, R.M. (1976) Mathematical Models with Very Complicated Dynamics, *Nature* 261: 459-467.
- [13] Medio, A. (1993) *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [14] Rössler, O.E. (1976) An equation for continuous chaos, *Phys.Lett.* 57A: 397-398.
- [15] Tu, P.N.V. (1994) *Dynamical Systems*, Springer - Verlag.

TAXES AND STABILITY OF INCOME GROWTH  
IN TRACTOR PRODUCTION

Vesna Jablanović

Faculty of Agriculture - Belgrade

**Abstract:** Chaos theory attempts to reveal structure in aperiodic, unpredictable dynamic systems.

Deterministic chaos refers to irregular or chaotic motion that is generated by nonlinear systems. Chaos embodies three important principles: (i) extreme sensitivity to initial conditions; (ii) cause and effect are not proportional; and (iii) nonlinearity.

The basic aim of this paper is to provide a relatively simple chaotic income growth model that is capable of generating stable equilibria, cycles, or chaos.

A key hypothesis of this work is based on the idea that the coefficient

$\pi = \frac{\beta}{\beta - \alpha}$  plays a crucial role in explaining local stability of income in the tractor

production, where:  $\alpha = \frac{\Delta Y_d}{\Delta L}$  and  $\beta = \frac{Y_d}{L}$  ( $\Delta$  - increase, L - labour engaged in the tractor production, and  $Y_d$  - the real disposable income in the tractor production).

**Key words:** income, tax rate, tractor production, chaos.