

Bibliid: 0350-2953 (2011)37, 3: 235-244
UDK: 664.854:634.21

Originalni naučni rad
Original scientific paper

NUMERIČKA SIMULACIJA MATEMATIČKOG MODELA SUŠENJA ŠLJIVE NUMERICAL SIMULATION OF PLUM DRYING MATHEMATICAL MODEL

Milovan Živković, Olivera Ećim-Đurić, Goran Topisirović¹

¹Poljoprivredni fakultet, Beograd-Zemun, Nemanjina 6.

gogi@agrif.bg.ac.rs

REZIME

Predmet studije je razvoj matematičkog modela konvektivnog sušenja šljive u prototipskoj sušari, sa ciljem da se razvijeni model može primeniti na ostale slične vrste voća. S obzirom da je sušenja šljiva jedan od tradicionalnih sušenih proizvoda ovog regiona, to je bio glavni razlog odabira za analizu. Matematički model sušenja šljive bazira se na osnovnim zakonima prenosa mase i toplote. Uporedo sa razvojem matematičkog modela, vršena su eksperimentalna merenja tokom sušenja šljive u prototipskoj sušari, a zatim su poređeni rezultati u cilju validacije. Vršena su tri testa sušenja u opsegu temperatura od 45°C do 73°C. Eksperimentalni deo ispitavanja podeljen je u tri režima sušenja sa po više faza (zagrevanje, pothlađivanje i sušenje). Poređenjem podataka dobijenih numeričkom simulacijom i podataka dobijenih iz ekperimenta, može se zaključiti da je matematički model uspešno razvijen.

Ključne reči: sušenje, kinetika sušenja, sušara, šljiva

1.UVOD

Sušenje voća je jedan od najstarijih tehnoloških postupaka u obradi hrane za kasniju upotrebu. Tradicionalno sušenje voća podrazumeva sušenje na otvorenom prostoru gde se proces sušenja odvija pod uticajem sunčevog zračenja (Torğul i Pehlivan 2003, Karathanos i Belessiotis 1997). Iako je ovaj metod, sa stanovišta potrošnje energije u tehnološkom postupku, efikasan, mane se ogledaju pre svega u izrazitoj zavisnosti postupka sušenja od vremenskih uslova kao i mogućnosti dobijanja proizvoda lošijeg kvaliteta zbog dugog vremena sušenja (Mathioulakis et al., 1998). Prednost tunela za sušenje leži u činjenici da je vreme tretiranja proizvoda skraćeno tako da se lakše može kontrolisati i sadržaj vlage i kvalitet proizvoda, a finalni proizvod koji se dobija ima zadovoljavajuće mikrobiološke karakteristike. Proces sušenja može se ubrzati predtretmanom kao što je blanširanje (Mathioulakis et al., 1998).

Šljiva (*Prunus domestica*) je jedna od najzastupljenijih vrsta voća koja se gaji u Republici Srbiji. Procenjuje se da se na ovom području gaji 24 vrste šljive. Prema FAO statistikama u periodu 1991-2001. god., na području Srbije proizvodnja šljive je iznosila 424.300 tona godišnje, ali je u kasnijim godinama opala popularnost uzgoja. Koristi se u svežem stanju ili za sušenje, proizvodnju rakije ili slatkih proizvoda. Suva šljiva je tradicionalni proizvod vezan za središnje područje Balkanskog poluostrva. Puna je vitamina i minerala, a deluje i kao blagi laksativ. Sveža šljiva sadrži visok procenta vode

(86% - 90%), pa je stoga definisanje procesa sušenja u kom se ostvaruje visok kvalitet sušenog proizvoda od velike važnosti (Goyal et al., 2007).

Razmatranjem i poređenjem postojećih modela sušenja kapilarno-poroznih koloidnih materijala, u radu je prikazan matematički model sušenja šljive, koji za osnovu ima teorijska razmatranja procesa sušenja sa izvesnim izmenama u cilju prilagodjenja metodologije proračuna za određeni sušeni materijal (O Callaghan et al., 1971, Youcef-Ali et al., 2001, Guiné 2008). Pri izboru osnove modela vodilo se računa da dobijeni model obezbeđuje dovoljnu tačnost kao i pogodnost u pogledu brzine proračuna na računaru. S obzirom da se model zasniva na osnovnim principima prenosa toplote i materije, može se smatrati da ima opšti karakter i da je, uz dovoljnu tačnost, primenljiv za veći broj različitih voćnih plodova. Navedeni model sušenja primenjiv je za sve biljne materijale koji ispunjavaju sledeće pretpostavke:

- Kontaktno provođenje toplote između plodova je zanemarljivo;
- Ne postoje temperaturni gradijenti u unutrašnjosti ploda;
- Promene svih parametara su jednodimenzionalne (nezavisna prostorna koordinata se poklapa sa smerom strujanja vazduha);
- U posmatranom elementarnom vremenskom intervalu promene stanja vazduha su zanemarljive;
- Specifični toplotni kapaciteti vlažnog vazduha i ploda su konstantni u kratkim vremenskim intervalima;
- Okolni zidovi prostora za sušenje su adijabatski sa zanemarljivim toplotnim kapacitetom.

Simboli	
A (m ²)	- površina
e (kW/kg _w)	- specifična potrošnja energije
k (s ⁻¹)	- efektivni koeficijent provođenja vlage materijala
Le (-)	- Lewis-ov broj
Re (-)	- Reynolds – ov broj
Pr (-)	- Prandtl – ov broj
Nu (-)	- Nusselt- ov broj
m (kg)	- masa
\dot{m} (kg/s)	- maseni protok
N (kg _w /m ² s)	- brzina sušenja
p (N/m ²)	- pritisak
\dot{q} (W/m ²)	- gustina toplotnog protoka
\dot{Q} (W)	- toplotni gubici komore za sušenje
Sh (-)	- Sherwood-ov broj
t (°C)	- temperatura
h (J/kg)	- entalpija
c (J/ kg°C)	- specifični toplotni kapacitet
x (kg _w /kg _s)	- apsolutna vlažnost vazduha
u (kg _w /kg _{sm})	- apsolutna vlažnost materijala
α (W/m ² K)	- koeficijent prelaza toplote
ϕ (-)	- relativna vlažnost vazduha
σ (kg _s /m ² s)	- koeficijent isparavanja
τ (s)	- vreme
V (m ³)	- zapremina

Indeksi	
i	- izlaz iz komponente sistema
p	- vodena para
r	- ravnotežno stanje
RF	- radni fluid
RT	- razmenjivač toplote
s	- materijal koji se suši i stanje na njegovoj površini
sv	- suv vazduh
u	- ulaz u komponentu sistema
vv	- vlažan vazduh
w	- vlaga

2.MATERIJAL I METOD

Primenom osnovnih jednačina o održanju materije, energije i kretanja na vlažni materijal definisan kao kapilarno-porozno četvoro-komponentni heterogeni sistem čvrste, tečne, parne i gasne faze, matematički opis ponašanja vlažnog materijala pri sušenju se može dati u sledećem obliku (jednačine polja sadržaja temperature, vlage i ukupnog pritiska) prema (Лыков, А.В 1968):

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \tau} &= k_{11} \cdot \nabla^2 T + k_{12} \cdot \nabla^2 u + k_{13} \cdot \nabla^2 p \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} &= k_{21} \cdot \nabla^2 T + k_{22} \cdot \nabla^2 u + k_{23} \cdot \nabla^2 p \\ \frac{\partial p}{\partial \tau} &= k_{31} \cdot \nabla^2 T + k_{32} \cdot \nabla^2 u + k_{33} \cdot \nabla^2 p\end{aligned}\quad (1)$$

Matricu sistema (1) čine koeficijenti k_{ij} , $i = 1,2,3$ čiji elementi zavise od termofizičkih osobina, odnosno osobina prenosa materije i toplote vlažnog materijala. Koeficijenti k_{ij} su fenomenološki koeficijenti, pri čemu koeficijenti k_{ij} , $i \neq j$ treba da obuhvate integralne - efekte sprege delovanja različitih sila i mehanizama. Nesumnjivo da je za određivanje ovih koeficijenta za konkretne vrste materijala i procese sušenja potrebna posebna evaluacija merodavnih podataka i eventualno njihovo posebno merenje.

Temperature poljoprivrednih materijala pri sušenju obično su dovoljno niske da se odgovarajući gradijenti temperature i ukupnog pritiska mogu smatrati dovoljno malim da se mogu zanemariti, tako da se sistem (1) svodi na jednačinu:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = k \cdot \nabla^2 u \quad (2)$$

U jednačinama (1) i (2) u je sadržaj vlage materijala. Vlaga nesumnjivo predstavlja "kontinuum", i to nije u saglasnosti sa suštinom veličina, čija polja fizika definiše, prostorno vezujući njihovo postojanje i dejstvo za tačku. Problemi koji iz toga proizlaze u velikoj meri još uvek otežavaju različite pokušaje generalizacije prilaza teoriji sušenja. Koeficijent k u gornjoj jednačini predstavlja efektivni koeficijent provođenja vlage materijala. Problemi određivanja lokalne vlažnosti koji iz toga proizlaze se prevazilaze uvođenjem veličine srednje vlažnosti celog materijala (Никитина 1968):

$$\bar{u} = \frac{1}{V} \cdot \int_V u \cdot dV \quad (3)$$

Polazeći od izraza za maseni protok vlage, koja se razmenjuje na graničnoj površini dodira različitih faza (vlažan materijal - vazduh):

$$\dot{m}_w = N \cdot A_s, \quad (4)$$

kao i materijalnog bilansa vlage:

$$\dot{m}_w = \dot{m}_{sv} \cdot (x_i - x_u), \quad (5)$$

uz jednačinu za brzinu sušenja isparavanja

$$N = \frac{Le \cdot c_{vv}}{\alpha_s} \cdot \left(u_s - \frac{x_i - x_u}{2} \right), \quad (6)$$

dobija se izraz za apsolutnu vlažnost vazduha na izlazu iz komore za sušenje:

$$x_u = \frac{x_u \cdot \left(\frac{2 \cdot \dot{m}_{sv} \cdot \alpha_s}{A_s \cdot Le \cdot c_{vv}} - 1 \right) + 2 \cdot u_s}{1 + \frac{2 \cdot \dot{m}_{sv} \cdot \alpha_s}{A_s \cdot Le \cdot c_{vv}}}. \quad (7)$$

Toplotni bilans vazduha za sušenje u komori može se dati u sledećem obliku:

$$\dot{m}_{sv} \cdot h_u + A_s \cdot N \cdot h_p = \dot{m}_{sv} \cdot h_i + A_s \cdot \dot{q}_s + \dot{Q}_1 \quad (8)$$

gde je

$$\dot{q}_s = \alpha_s \cdot \left(\frac{t_u + t_i}{2} - t_s \right), \quad (9)$$

gustina toplotnog protoka konvekcijom na graničnoj površini dodira različitih faza.

U jednačini (9) temperatura t_u na ulazu u komoru za sušenje određuje se iz energetskog bilansa izobarskog zagrevanja vazduha električnim grejačima

$$t_u = t_s + \frac{N_{gr}}{m_{sv}} \quad (10)$$

gde su N_{gr} - snaga električnog grejača, a m_{sv} maseni protok suvog vazduha.

Koeficijent prelaza toplote (α_s) može da se izračuna koristeći Nusselt-ovu teoriju:

$$Nu = C_1 \cdot Re^{C_2} \cdot Pr^{0.33}, \quad (11)$$

pri čemu su koeficijenti C_1 i C_2 karakteristike materijala koji se suši.

Uvođenjem izraza za specifičnu entalpiju vlažnog vazduha i specifičnu entalpiju vlage u parnom stanju (vodene pare) u jednačinu (8), dobija se izraz za temperaturu vazduha na izlazu iz sušare:

$$t_i = \frac{\frac{2 \cdot \dot{m}_{sv} \cdot \alpha_s}{A_s \cdot Le \cdot c_{vv}} - Le}{\frac{2 \cdot \dot{m}_{sv} \cdot \alpha_s}{A_s \cdot Le \cdot c_{vv}} + Le} \cdot t_s + \frac{(r_0 + c_{pp} \cdot t_s) \cdot (2 \cdot u_s - x_u - x_i) + 2 \cdot Le \cdot t_s \cdot c_{vv}}{c_{vv} \cdot \left(\frac{2 \cdot \dot{m}_{sv} \cdot \alpha_s}{A_s \cdot Le \cdot c_{vv}} + Le \right)}$$

$$\frac{2 \cdot \dot{m}_{sv} \cdot \alpha_s}{A_s \cdot Le \cdot c_{vv}} \cdot \left[r_0 \cdot (x_u - x_i) - \dot{Q}_L / \dot{m}_{sv} \right] + \frac{c_{vv} \cdot \left(\frac{2 \cdot \dot{m}_{sv} \cdot \alpha_s}{A_s \cdot Le \cdot c_{vv}} + Le \right)}{c_{vv}} \quad (12)$$

Materijalni bilans vlage u vlažnom materijalu i toplotni bilans vlažnog materijala imaju oblik jednačina (13) i (14), respektivno:

$$m_s \cdot \frac{du}{d\tau} = -A_s \cdot N \quad (13)$$

$$m_s \cdot \frac{dh_s}{d\tau} = A_s \cdot (\dot{q}_s - N \cdot h_p) \quad (14)$$

Uz pomoć izraza za entalpiju vlažnog materijala:

$$h_s = (c_s + c_w \cdot u_s) \cdot T_s \quad (15)$$

jednačinu (14) moguće je napisati u obliku:

$$\frac{m_s}{A_s} \cdot (c_s + c_w \cdot u) \cdot \frac{dT_s}{d\tau} = \dot{q}_s - N \cdot [r_0 + (c_{vv} - c_w) \cdot T_s] \quad (16)$$

Kako bi se odredila apsolutna vlažnost na površini materijala u_s , potrebno je poznavati koeficijent provođenja vlage materijala k . Koristeći jednačinu (6) i jednačinu:

$$-\frac{du}{d\tau} = k \cdot (u - u_t) \quad (17)$$

za apsolutnu vlažnost na površini materijala dobija se izraz:

$$u_s = \frac{k \cdot u \cdot \frac{m_s}{A_s} + \sigma \cdot \frac{x_u + x_i}{2}}{k \cdot \frac{m_s}{A_s} + \sigma} \quad (18)$$

Koristeći prve dve jednačine u sistemu (1) i jednačine (4), (8), (9), (13), (15), (16) uz dodatak početnih uslova:

$$u(\tau_0) = u_0, \quad t_s(\tau_0) = t_{s0}, \quad x(\tau_0) = x_0 \quad \text{and} \quad t(\tau_0) = t_0 \quad (19)$$

proces sušenja vlažnog materijala je potpuno određen.

3. REZULTATI I DISKUSIJA

U numeričkoj simulaciji procesa sušenja korišćene su jednačine 4-19 prikazane u prethodnoj sekciji. Pored podataka iz tabele 1. korišćeni su i parametri kojim se definišu osobine plodova šljive kao i ostali strujni parametri koji su predhodili eksperimentima procesa sušenja. Simulacija procesa sušenja sprovedena je za hidrometeorološke uslove u Beogradu.

Tab. 1. Merodavne osobine i parametri materijala i agensa sušenja

Tab. 1. Referent characteristics and parameters of drying materials and agents

Parametar Parameter	Dimenzija Dimension	Plodovi šljive Plum
------------------------	------------------------	------------------------

c_p	kg/kgK	4,202
c_a	kg/kgK	1,01
c_w	kg/kgK	4,842
c_v	kg/kgK	1,842
μ	Ns/m ²	$\mu a = 4,78 \cdot 10^{-8} (t_a + 359)$
A	m ²	0,0036
A	m ² /s	$1,44 \cdot 10^5$
λ	W/mK	0,614
α	W/m ² K	3110

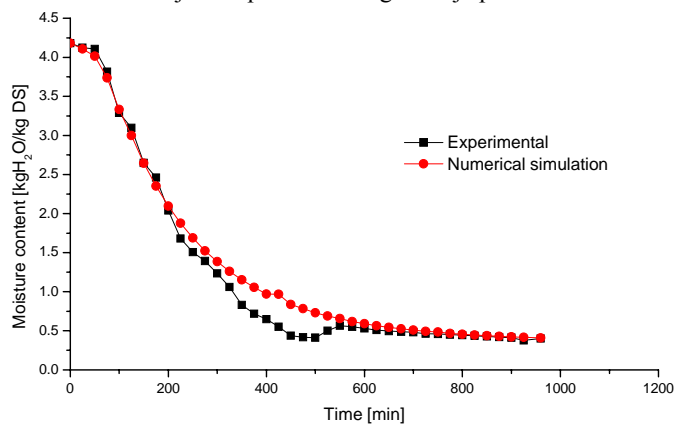
U skladu sa definisanim programom istraživanja, ispitivanja su obuhvatila istraživanja procesa sušenja šljive eksperimentalnim putem koja su sprovedena na laboratorijskoj instalaciji za ispitivanja procesa sušenja i prototipskoj industrijskoj sušari. Sušene su sorte šljiva Požegača i Stenlej a svi režimi rada ponavljani su po tri puta.

Pošto je osnovna karakteristika procesa sušenja temperaturski režim, eksperimentalna istraživanja sušenja šljive su koncipirana tako da obuhvate određeni broj ponovljenih merenja sa režimima koji su podeljeni u tri grupe:

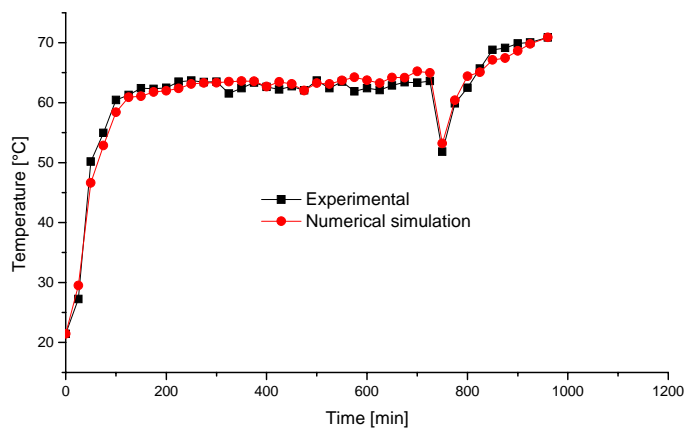
Režim I obuhvata tri faze:

- faza predgrevanja u trajanju od 1 časa sa temperaturom vazduha od 45°C,
- prelazna faza u trajanju od 11 časova sa temperaturom od 73°C (do faze podhlađivanja koja traje od 30 minuta sa temperaturom od 53°C),
- faza sušenja sa temperaturom od 73°C do dostizanja zadate vlažnosti.

Uporedni rezultati simulacije i eksperimentalnog sušenja prikazani su na Slikama 1 i 2.

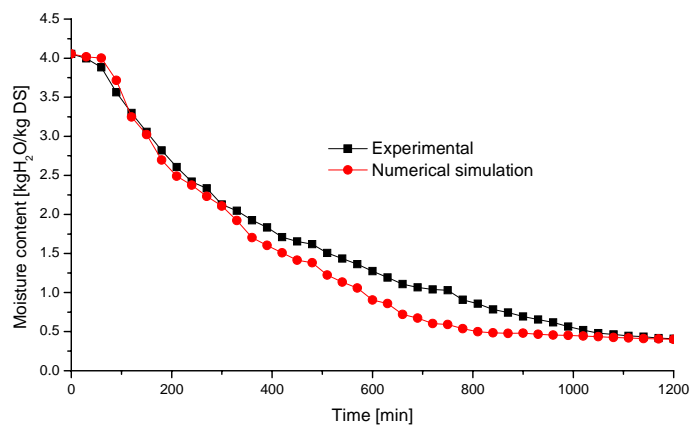


Sl. 1. Sadržaj vlage u materijalu u režimu I
Fig. 1. Material moisture content in drying mode I

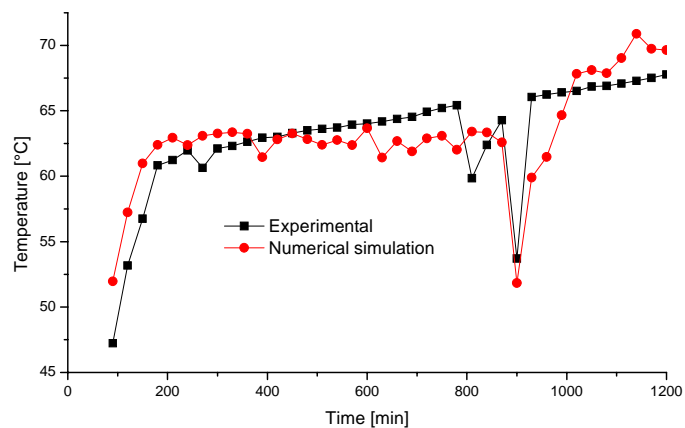


Sl. 2. Temperatura sušenog materijala u režimu I
Fig. 2. Material temperature in drying mode I

Režim II sadrži samo jednu fazu sa konstantnom temperaturom od 73°C. Uporedni rezultati simulacije i eksperimentalnog sušenja prikazani su na Slikama 3 i 4. Trajanje procesa sušenja u svakom od eksperimenata je definisano dostizanjem odgovarajuće vlažnosti plodova (28,3-29,5%).



Sl. 3. Sadržaj vlage u materijalu u režimu II
Fig. 3. Material moisture content in drying mode II

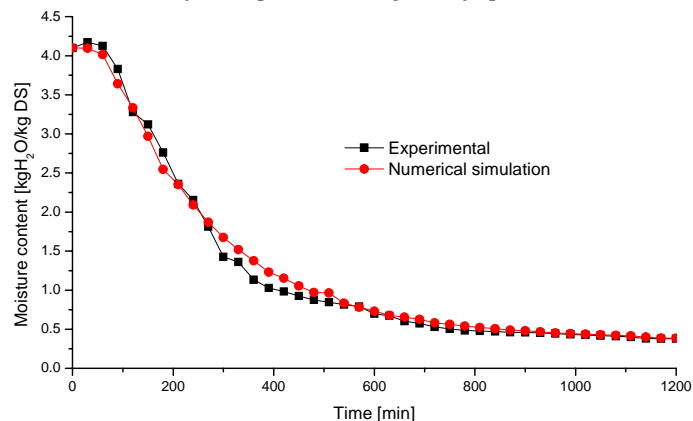


Sl. 4. Temperatura sušenog materijala u režimu II
Fig. 4. Material temperature in drying mode II

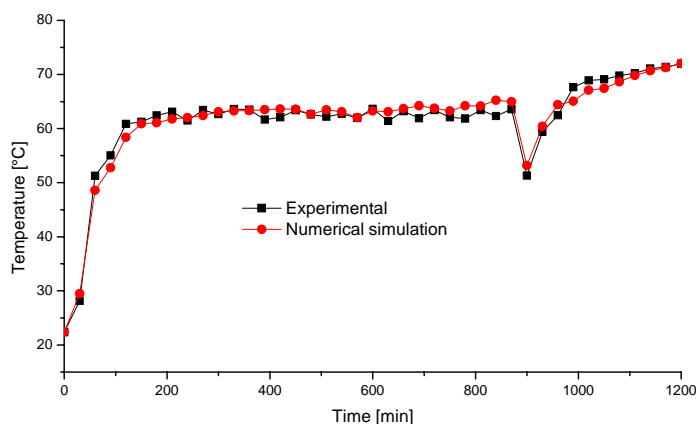
Režim III obuhvata četiri faze:

- predgrevanje u trajanju od oko 1 čas sa temperaturom vazduha za sušenje od 45°C,
- prelazna faza u trajanju od oko 8 časova je sa temperaturom vazduha od 65°C,
- fazu podhlađivanja u trajanju od 30 minuta (nakon 13 časa od završetka prethodne faze) sa temperaturom vazduha od 54°C.
- faza sušenja sa temperaturom od 73°C (maksimalna temperatura vazduha) do postizanja krajnje vlažnosti materijala

Uporedni rezultati simulacije i eksperimentalnog sušenja prikazani su na Slikama 5 i 6.



Sl. 5. Sadržaj vlage u materijalu u režimu III
Fig. 5. Material moisture content in drying mode III



Sl. 6. Temperatura sušenog materijala u režimu III
Fig. 6. Material temperature in drying mode III

Tokom ekperimentalnog sušenja uočeno je da je sadržaj vlage u režimu I i režimu III u fazi predgrevanja bio niži. U fazi sušenja, u početnoj fazi, sa trajanjem od 3-5h brzina sušenja je bila veća, pa samim tim i izdvajanje vlage iz materijala intenzivnije, a posle tog perioda, do kraja faze sušenja, zabeležene su manje brzine sušenja. Dinamička promena sadržaja vlage u sušenom materijalu karakteristična je za sve višefazne modele sušenja.

4.ZAKLJUČAK

Dati matematički model uspešno je primenjen za dinamičke simulacije procesa sušenja. Rezultati simulacije dobijeni sprovođenjem računskog programa obuhvataju podatke o srednjoj i lokalnoj vlažnosti ploda u sloju, lokalnoj temperaturi ploda i vazduha, kao i lokalnoj apsolutnoj i relativnoj vlažnosti vazduha u sloju u toku predviđenog vremena sušenja. Analiza dobijenih vrednosti numeričkim simulacijama i eksperimentalnim putem pokazala su dobro slaganje rezultata u sva tri režima sušenja. Numerički model sa uspehom se može primeniti i na simulaciju sušenja drugih vrsta voća iz iste grupe (koštunjavo voće).

Na osnovu pregleda karakterističnih pojava i procesa merodavnih za pojavu prenosa materije i toplote karakterističnih za procese i sisteme sušenja poljoprivrednih materijala kao i analize metoda njihovog matematičkog opisa i upoređenja ekperimentalnih i numeričkih rezultata može se zaključiti, da razvijeni model omogućuju predviđanje ponašanja sistema, režima rada i odgovarajućeg uticaja na relativne brzine sušenja, kao i specifične i ukupne potrošnje energije. To dozvoljava prilaz optimizaciji sistema i procesa ali ne i zatvaranje procesa optimizacije.

5.LITERATURA

- [1] Goyal R.K., Kingsly A.R.P., Manikantan M.R., Ilyas S.M. 2007. Mathematical modeling of thin layer drying kinetics of plum in a tunnel dryer. *Journal of food Engineering*, 79, 176-180
- [2] Guiné, Raquel P.F. 2008. Pear drying: Experimental validation of a mathematical prediction. *Food and bioproducts processing*, 86, 248-253

- [3] Karathanos V. T., Belessiotis V. G. 1997. Sun and artificial air drying kinetics of some agricultural products. *Journal of Food Engineering*, 31, 35–46.
- [4] Mathioulakis E. Karathanos V.T., Belessiotis V.G. 1998. Simulation on air movement in a dried by computational fluid dynamics: Application for the drying of fruits. *Journal of food Engineering*, 36, 183-200
- [5] O Callaghan J. R., Menzies D. J., Bailey P. H. 1971. Digital simulation of agricultural dryer performance. *Journal of Agricultural Engineering Research*, 16, 223–244.
- [6] Youcef-Ali S.N, Moumni J.Y., Desmons A, Abene H. Messaoudi, M. Le Ray. 2001. Numerical and experimental study of dryer in forced convection. *International Journal of Energy Research* 25 (6) (2001) 537–553.
- [7] Torđul I.T., Pehlivan D. 2003. Modeling of drying kinetics of single apricot. *Journal of food Engineering* 58, 23-32
- [8] Лыков, А.В.: Теория сушки. Энергия. Москва, 1968
- [9] Никитина, Л.М. Термодинамические параметры и коэффициенты массопереноса во влажных материалах. Энергия. Москва, 1968.

NUMERICAL SIMULATION OF PLUM DRYING MATHEMATICAL MODEL

Milovan Živković, Olivera Ećim-Đurić, Goran Topisirović

SUMMARY

The presented study is to develop a mathematical model of convective drying of plums in the prototype dryer, in order to apply the developed model to other similar types of fruit. Since the dried plums are one of the traditional dried products of many regions in Serbia, this is the main reason for selecting the analysis. A mathematical model of drying plums is based on the fundamental laws of mass and heat transfer. Along with the development of mathematical models, experimental measurements were carried out during drying plum in the prototype dryer and then the results were compared for validation. Three models were carried out, in the range of drying temperatures of 45°C to 73°C. Two drying models were divided in several phases (heating, hypothermia and drying), and one model had only one phase of drying. By comparing the data obtained by numerical simulation and experimental data, it can be concluded that the mathematical model is successfully developed.

Key words: drying, drying kinetics, drying plant, plum

Primljeno: 14. 01. 2011.

Prihvaćeno: 27. 04. 2011.